Reaktanzvierpol mit gegebenen Sperrstellen und gegebenem einseitigen Leerlauf- oder Kurzschlusswiderstand

Von HANS PILOTY, München

(A.E.Ü. 1 [1947] 59—70; eingegangen am 29. Mai 1947)

DK 621.392

1. Die Aufgabe

Ein Reaktanzvierpol, d. h. ein Vierpol, der aus verlustlosen Schaltelementen aufgebaut ist, läßt sich bekanntlich in dem Sinn eindeutig durch die frequenzabhängigen Parameter gewisser Gleichungen charakterisieren, daß zwei in diesen Parametern identisch in der Frequenz übereinstimmende Vierpole in allen an den beiden Klemmenpaaren meßbaren Eigenschaften übereinstimmen. Solche Vierpole heißen äquivalent. Sieht man äquivalente Vierpole als nicht wesentlich verschieden an, wie es hier geschehen soll, so genügen mithin zur eindeutigen Charakterisierung eines Vierpols die erwähnten Parameter oder besser Funktionen der Frequenz. Sind sie bekannt, so ist der Vierpol in allen seinen (Vierpol-) Eigenschaften festgelegt. Spezielle, diese Eigenschaften verkörpernde Schaltungen interessieren dann nicht, wenn es nur darauf ankommt, Eigenschaften zu ermitteln. Es genügt dann zu wissen, daß solche Schaltungen existieren, und die Wege zu kennen, auf denen man zu den Schaltungen gelangt. Diese Wege sind für die hier behandelten Parameter-Systeme bekannt, so daß von ihnen nicht weiter die Rede zu sein braucht.

Eines der erwähnten Gleichungs-Systeme ist dasjenige, welches die primären Größen (Spannung und Strom) mit den sekundären verknüpft. Unter Annahme einer bestimmten Vorzeichenregel — etwa der technischen[1] — lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathsf{A}_1 U_2 + \mathsf{B} J_2 \\ J_1 &= \mathsf{C} U_2 + \mathsf{A}_2 J_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

in denen U_1 und U_2 primäre und sekundäre Spannung, J_1 und J_2 primären und sekundären Strom, und die Größen der Matrix

$$\|\mathsf{K}\| = \begin{Vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{A}_2 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

der sogenannten „Kettenmatrix“, die oben erwähnten, aus der elementaren Vierpoltheorie wohl bekannten Parameter (Frequenzfunktionen) sind.

Andere Gleichungssysteme verknüpfen Spannungen mit Strömen oder umgekehrt. In ihnen ist es zweckmäßig, die symmetrische Vorzeichenregel zu verwenden. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir hier $J_2' = -J_2$. Die Gleichungen und die zugehörigen Matrixen lauten:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} J_1 + Z_{12} J_2' \\ U_2 &= Z_{21} J_1 + Z_{22} J_2' \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\|Z\| = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

„Widerstandsmatrix“

[1] Die technische Vorzeichenregel lautet so:

„In jedem Klemmenpaar wird eine Klemme zur „positiven Klemme" ernannt und die Spannung positiv gezählt, wenn die positive Klemme positives Potential gegen die negative hat. Der Strom wird positiv gezählt, wenn er in die primäre positive Klemme hinein- und aus der sekundären positiven Klemme herausfließt, so daß die Leistung positiv zählt, wenn sie dem primären Klemmenpaar zugeführt, dem sekundären entnommen wird."

Kehrt man das Vorzeichen des sekundären Stromes um, so daß dieser, wie der primäre, positiv gezählt wird, wenn er in die positive Klemme hineinfließt, so erhält man die weiter unten benützte symmetrische Vorzeichenregel.

$$\begin{aligned} J_1 &= Y_{11}\,U_1 + Y_{12}\,U_2 \\ J_2' &= Y_{21}\,U_1 + Y_{22}\,U_2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

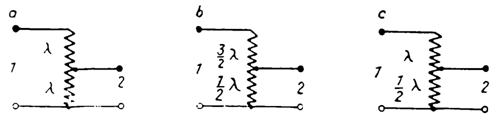
„Leitwertsmatrix"

Vom Standpunkt der praktischen Anwendung aus gesehen ist die Darstellung der Vierpoleigenschaften nach Gl (1) die am besten geeignete, weil am allgemeinsten verwendbare. Sie existiert nämlich immer, solange der Vierpol keine sogenannte „Allsperre" ist, das heißt nicht die Eigenschaft hat, bei keiner Frequenz Energie von einer Stromquelle mit ohm'schem Innenwiderstand auf einen ohm'schen Verbraucher zu übertragen. Solche Allsperren interessieren nicht und lassen sich übrigens bei vorgeschriebenen Eigenschaften immer durch triviale Schaltungen realisieren[2]. Dagegen existieren Widerstandsmatrix oderLeitwertsmatrix bekanntlich bei durchaus brauchbaren, ja gerade den einfachsten Übertragungssystemen nicht, die erstere nicht bei reinem Längs-, die zweite nicht bei reinem Querwiderstand, beide nicht bei durchgeschalteten Drähten. Ich räume daher der Kettenmatrix eine gewisse Vorzugsstellung ein.

Von allen drei Matrizen ist bekannt, welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen ihre Elementfunktionen genügen müssen, damit zugehörige Reaktanzschaltungen existieren. Die Sätze, die diese Bedingungen aussprechen, mögen „Realisierbarkeitssätze" heißen. Die Aufgabe, einen Reaktanzvierpol aus irgendwelchen Bestimmungsstücken zu konstruieren, läuft demnach darauf hinaus, die Elementfunktionen einer der drei charakteristischen Matrizen zu finden unter Beachtung der im zugehörigen Realisierbarkeitssatz ausgesprochenen Realisierbarkeitsbedingungen.

Gegenstand dieses Aufsatzes ist eine ganz bestimmte unter diesen Aufgaben, nämlich, zunächst in ungenauer Formulierung, die Aufgabe, einen Reaktanzvierpol aus seinen „Sperrstellen" und einem einseitigen Leerlauf- oder Kurzschlußwiderstand zu konstruieren. Sperrstellen heißen diejenigen Werte der unabhängigen Variabeln $\lambda = i\omega$ ($\omega = 2\pi f$ = Kreisfrequenz), an denen mindestens eine der vier Größen der Kettenmatrix unendlich wird. Der Name soll andeuten, daß bei (reellen) Frequenzen, die rein imaginären Sperrstellen entsprechen, der Vierpol keine Energie von einer Stromquelle mit ohm'schem Innenwiderstand auf einen ohm'schen Verbraucher überträgt. Die Vielfachheit einer Sperrstelle wird gemessen durch die Ordnung des Pols der betreffenden Elementfunktion der Kettenmatrix oder, wenn mehrere einen Pol haben, durch die höchste dieser Ordnungen[3].

Die wie oben formulierte Aufgabe ist, wie man an Beispielen sehen kann, sicherlich nicht immer lösbar. So stimmen etwa die drei in Abb. 1 gezeigten Vierpole — Spannungsteiler aus je zwei Spulen mit den in den Abbildungen angegebenen Reaktanzen — in sämtlichen Sperrstellen überein; sie haben je eine einfache Sperrstelle bei $\lambda = 0$ und bei $\lambda = \infty$. Die Schaltungen a) und b) haben übereinstimmenden linken Leerlaufwiderstand 2λ, die Schaltungen a) und c) übereinstimmenden linken Kurzschlußwiderstand λ. Der Vierpol nach Schaltung a) kann also weder durch seinen linken Leerlauf, noch durch seinen linken Kurzschlußwiderstand in Verbindung mit den Sperrstellen charakterisiert werden.



● positive } Klemmen
o negative }

$$|K| = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \quad \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 4\lambda & \frac{3}{2}\lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \quad \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

Abb. 1. Beispiele für nicht zulässige Vierpole.

[2] Beispiele solcher Allsperren sind:
Vier überhaupt nicht, oder durch Kurzschluß miteinander verbundene Klemmen oder Schaltungen, in denen nur zwischen den Klemmen eines jeden Paares Verbindung über irgendwelche Widerstände besteht, nicht dagegen zwischen Klemmen verschiedener Paare.

[3] Dies wird dadurch nahegelegt, daß an einer r-fachen Sperrstelle der sogenannte Betriebsübertragungsfaktor des zwischen ohm'schen Widerständen arbeitenden Vierpols einen Pol r-facher Ordnung hat.

Weiterhin ist es auch dann, wenn wir die Aufgabe passend einschränken, grundsätzlich unmöglich, einen Vierpol durch einen der beiden linken Widerstände und die Sperrstellen völlig eindeutig zu kennzeichnen. Denn wenn irgend ein Vierpol die Aufgabe löst, so tut dies auch ein zweiter, der sich vom ersten dadurch unterscheidet, daß ihm ein idealer Übertrager rechts nachgeschaltet wird[4]. Denn diese Maßnahme ändert weder die linken Widerstände noch die Sperrstellen. Wir werden jedoch sehen, daß unter geeigneten Voraussetzungen diese Unbestimmtheit die einzige, unwesentliche, in der Natur der Sache liegende bleibt.

Die wesentliche schon in dem einfachen Beispiel von Abb. 1 zum Ausdruck kommende Unbestimmtheit hat ihren tieferen Grund darin, daß dort die Zahl n der vorgeschriebenen Sperrstellen größer ist als der Grad der vorgeschriebenen Reaktanz. Im Beispiel ist $n = 2$ und der Grad der vorgeschriebenen Reaktanz ist 1. Es wird sich zeigen, daß die folgende Grundaufgabe stets durch einen bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers eindeutig bestimmten Vierpol gelöst werden kann:

> Grundaufgabe: „Es soll ein Reaktanzvierpol gefunden werden, der n innerhalb des überhaupt Zulässigen willkürlich vorgeschriebene Sperrstellen besitzt und eine beliebig vorgeschriebene Reaktanz n-ten Grades entweder zum linken Leerlauf- oder zum linken Kurzschlußwiderstand hat".

Dazu noch einige erläuternde Bemerkungen: Zulässige Sperrstellen sind, wie der nachher formulierte Realisierbarkeitssatz der Kettenmatrix fordert, Nullstellen eines reellen, geraden oder ungeraden Polynoms, mehrfache entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, dazu noch u. U. der Punkt $\lambda = \infty$. Demnach gibt es Sperrstellen folgender Art:

$$\lambda = 0;\ \lambda = \infty;\ \lambda = +i\alpha;\ \lambda = \pm\beta;$$
$$\lambda = +/-\gamma, +/-\bar{\gamma}$$

(α, β reell; γ komplex, nicht imaginär, nicht reell; $\bar{\gamma}$ dazu konjugiert komplex). Eine Reaktanz $Z(\lambda)$ ist definiert als eine ungerade, reelle, rationale Funktion, die für $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ positiven Realteil annimmt. Man kann sie auch definieren als eine ungerade, rationale Funktion mit einfachen Polen auf der imaginären Achse, deren Partialbruchzerlegung:

$$Z(\lambda) = A_0/\lambda + \sum_\nu \frac{A_\nu \lambda}{\lambda^2 + \alpha_\nu^2} + A_\infty \lambda \qquad (7)$$

lauter positive Koeffizienten A hat. Ist eine Funktion eine Reaktanz, so ist es auch ihr reziproker Wert.

2. Grundaufgabe und Kettenmatrix.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Kettenmatrix zu konstruieren, sowie zu zeigen, daß dies immer, und zwar eindeutig bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers möglich ist.

Da die Größen der Kettenmatrix (2) rationale Funktionen von λ sind, können wir sie als Quotienten aus Polynomen ansetzen. Schreibt man sie noch dazu mit normiertem (Höchstkoeffizient = 1) gemeinsamen Hauptnenner, so erhält man die Darstellung in „reduzierter und normierter Polynomform"

$$\| \mathsf{K} \| = \frac{1}{g} \cdot \begin{Vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{Vmatrix}. \qquad (8)$$

In ihr waren auch unsere obigen Beispiele geschrieben. Die Zahl n der Sperrstellen ist identisch mit dem höchsten der vier Grade der vier Zählerpolynome. Sie heißt deshalb auch „Grad der Matrix". Die Buchstabenwahl erklärt sich aus Bedingung 1 des folgenden Realisierbarkeitssatzes[5]:

> „Eine zweireihige, quadratische, nach Gl (8) in reduzierter Polynomform geschriebene Matrix rationaler Funktionen ist dann und nur dann die Kettenmatrix eines Reaktanzvierpols, wenn gilt:

[4] Hierin ist auch einseitiges Umpolen, das heißt ein idealer Übertrager von der Übersetzung -1:1 mit inbegriffen.

[5] Vgl. die Arbeit [1]. Die folgende Formulierung unterscheidet sich von derjenigen des dort so genannten zweiten Realisierbarkeitssatzes nur durch Verwendung der Polynomdarstellung.

1. Alle Polynome sind reelle Polynome der Variabeln λ, und zwar die Polynome g, g_1, g_2 gerade, die Polynome u_1 und u_2 ungerade oder umgekehrt.
2. Es gilt die Identität (Determinante der Kettenmatrix = 1)

$$g_1\, g_2 - u_1\, u_2 = g^2 \tag{9}$$

3. Mindestens 3 der 4 Quotienten u_1/g_1, u_1/g_2, u_2/g_1 und u_2/g_2 sind Reaktanzen. Damit ist es auch der vierte Quotient. Eines der beiden Polynome u_1 und u_2 oder beide können identisch verschwinden. Dann gilt mit einer reellen Konstanten k:

$$g_1 = k\, g \qquad g_2 = \frac{1}{k} g \,.\text{“}$$

Dieser Satz ist die Grundlage für die Lösung unserer Aufgabe. Zunächst müssen nun die gegebenen Daten in die Sprache der Kettenmatrix in reduzierter und normierter Polynomform übertragen werden.

Wenn der gesuchte Reaktanzvierpol die gegebene Reaktanz zum linken (primären, Index 1) Leerlauf- bzw. Kurzschlußwiderstand haben soll, so heißt das, daß der Quotient g_1/u_2 bzw. u_1/g_2 mit der gegebenen Reaktanz übereinstimmen soll. Wenn der Reaktanzvierpol einen vorgeschriebenen Sperrstellensatz haben soll, so heißt das, daß das Nennerpolynom (normiert, das heißt mit Höchstkoeffizient 1) gegeben ist. Seine Nullstellen sind einschließlich Vielfachheit die endlichen Sperrstellen, sein „Graddefekt“, d. h. der Unterschied zwischen dem höchsten der Grade der vier Zählerpolynome und dem Grad des Nennerpolynoms, gibt, wenn von Null verschieden, die Vielfachheit der dann bei $\lambda = \infty$ vorhandenen Sperrstelle an. Daß die Sperrstellen aus der Menge der zulässigen entnommen sind, bedeutet einfach, daß das Nennerpolynom g entweder gerade oder ungerade ist. Sind also vorgeschrieben: Eine r_0-fache Sperrstelle bei $\lambda = 0$, r_ν-fache Sperrstellen bei $\lambda = \pm\, i\alpha_\nu$, r_μ-fache Sperrstellen bei $\lambda = \pm\, \beta_\mu$ und r_σ-fache Sperrstellen bei $\lambda = \pm\, \gamma_\sigma$, $\pm\, \bar{\gamma}_\sigma$, so lautet das Nennerpolynom

$$g(\lambda) = \lambda^{r_0} \cdot \prod_\nu (\lambda^2 + \alpha_\nu^2)^{r_\nu} \cdot \prod_\mu (\lambda^2 - \beta_\mu^2)^{r_\mu} \cdot \prod_\sigma \left[\lambda^4 - \left(\gamma_\sigma^2 + \bar{\gamma}_\sigma^2\right) \cdot \lambda^2 + \gamma_\sigma^2 \cdot \bar{\gamma}_\sigma^2\right]^{r_\sigma}$$

Es ist gerade oder ungerade, je nachdem r_0 eine gerade oder ungerade Zahl ist, und sein Grad ist

$$m = r_0 + 2 \sum_\nu r_\nu + 2 \sum_\mu r_\mu + 4 \sum_\sigma r_\sigma . \tag{11}$$

Ist n der höchste der Grade der vier Zählerpolynome — Grad der Matrix —, so liegt bei $\lambda = \infty$ eine r_∞-fache Sperrstelle mit

$$r_\infty = n - m. \tag{12}$$

Schließlich ist noch festzustellen, worin sich die Forderung der Grundaufgabe äußert, der Grad der gegebenen Reaktanz und die Zahl der Sperrstellen solle ein und dieselbe Zahl sein. Wie leicht einzusehen, heißt dies, daß entweder das Polynompaar g_1 und u_2, oder das Polynompaar u_1 und g_2 keinen gemeinsamen Teiler haben dürfen, und daß ein Polynom des Paares den Grad der Matrix haben soll. Das Polynompaar g_1 und u_2 bzw. u_1 und g_2 muß dabei betrachtet werden, wenn die gegebene Reaktanz mit dem linken Leerlauf- bzw. Kurzschlußwiderstand übereinstimmen soll. Hätte nämlich das betrachtete Polynompaar einen Teiler gemeinsam, oder hätte keines seiner beiden Polynome den Grad n der Matrix, so wäre der zugehörige Widerstand von einem Grad $< n$.

Nun kann die Frage beantwortet werden, wann, wenn überhaupt, die Grundaufgabe mit einem Leerlauf- und wann sie mit einem Kurzschlußwiderstand lösbar ist. Soll ein Leerlaufwiderstand herauskommen, so ist das Polynompaar g_1 und u_2 zu betrachten. Hat die gegebene Reaktanz bei $\lambda = 0$ eine Nullstelle (einen Pol), so ist das Polynom g_1 ein ungerades (ein gerades), das Polynom u_2 ein gerades (ein ungerades), mithin nach dem Realisierbarkeitssatz (Bedingung 1) das Polynom g ein ungerades (ein gerades) oder, anders ausgedrückt, die Vielfachheit der Sperrstelle bei $\lambda = 0$ eine ungerade (eine gerade[6]). Entsprechend schließt man für den Fall des Kurzschlußwiderstandes und findet, daß die Grundaufgabe nur Lösungen nach der folgenden Regel A haben kann:

[6] oder Null, d. h. die Sperrstelle ist gar nicht vorhanden.

Regel A:

„Hat die gegebene Reaktanz bei $\lambda = 0$ einen Pol (eine Nullstelle), so ergibt die Grundaufgabe als Lösung Vierpole, welche die gegebene Reaktanz zum Leerlauf- bzw. Kurzschlußwiderstand haben, je nachdem ob die Vielfachheit der Sperrstelle bei $\lambda = 0$ gerade (ungerade) oder ungerade (gerade) ist. Gerade Vielfachheit schließt auch den Fall ein, daß bei $\lambda = 0$ eine Sperrstelle nicht vorhanden ist.“

Wegen der genauen Disjunktion zwischen den beiden Möglichkeiten ist also die Grundaufgabe nur entweder mit einem Leerlauf- oder aber mit einem Kurzschlußwiderstand lösbar.

Jetzt ist es möglich, die Lösung selbst in Angriff zu nehmen. Es möge etwa der Fall des Leerlaufwiderstandes (vom Grad n) vorliegen. Dann ist der Quotient g_1/u_2 und es sind, weil beide Polynome nach obigem teilerfremd sind, auch die Polynome g_1 und u_2 einzeln bis auf Hinzufügen eines beliebigen, reellen (reell wegen Bedingung 1 des Realisierbarkeitssatzes), konstanten Faktors bekannt. Ferner ist das Polynom g in der Darstellung der Gl (10) gegeben. Es hat die endlichen Sperrstellen zu Nullstellen, und sein Gradunterschied gegenüber dem höheren der beiden Grade der Polynome g_1 und u_2 bedeutet die Vielfachheit der Sperrstelle bei $\lambda = \infty$. Gesucht werden zwei reelle Polynome u_1 und g_2 vom Grade $\leq n$, g_2 mit g_1, u_1 mit u_2 gerade bzw. ungerade und so beschaffen, daß auch die Bedingungen 2 und 3 des Realisierbarkeitssatzes erfüllt sind.

Wir betrachten die Determinantenbedingung Gl (9): $g^2 = g_1 g_2 - u_1 u_2$ und daraus folgend die rationale Funktion:

$$f(\lambda) = \frac{g^2(\lambda)}{g_1(\lambda)\, u_2(\lambda)} = \frac{g_2(\lambda)}{u_2(\lambda)} - \frac{u_1(\lambda)}{g_1(\lambda)}. \quad (13)$$

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die beiden unbekannten Polynome g_2 und u_1 so zu bestimmen, daß die beiden Quotienten g_2/u_2 und u_1/g_1 Reaktanzen werden und Gl (13) erfüllt ist. Denn dann sind die Bedingungen 2 und 3 des Realisierbarkeitssatzes erfüllt, die erstere, weil Gl (13) nur eine andere Formulierung der Bedingung 2 darstellt, die letztere, weil drei der in ihr erwähnten Quotienten, nämlich u_2/g_1 (als gegebene Reaktanz) u_2/g_2 und u_1/g_1 (wegen der obigen Bedingung) Reaktanzen sind. Auch Bedingung 1 des Realisierbarkeitssatzes ist dann automatisch erfüllt. Denn wegen Regel A ist g_1 und g ein gerades bzw. ungerades, u_2 ein ungerades bzw. gerades Polynom, so daß, wenn g_2/u_2 und u_1/g_1 Reaktanzen sind, auch die beiden Polynome g_2 und u_1 in richtiger Weise gerade oder ungerade (und selbstverständlich reell) ausfallen.

Um nun die Polynome g_2 und u_1 in dieser Weise zu bestimmen, wählen wir von jetzt ab den noch unbestimmten, gemeinsamen, reellen, konstanten Faktor von g_1 und u_2 in bestimmter Weise. Damit ist auch die Funktion $f(\lambda)$ eindeutig festgelegt. Sie ist eine reelle ungerade Funktion mit einfachen Polen auf der imaginären Achse. Letztere sind nämlich diejenigen Nullstellen von g_1 und u_2, die nicht gleichzeitig Nullstellen von g sind und die, da g_1 und u_2 teilerfremd und Zähler und Nenner einer Reaktanz sind, nur einfach und imaginär sein können. Auch ein etwaiger Pol bei $\lambda = \infty$ ist notwendig einfach, denn das Nennerpolynom $g_1 \cdot u_2$ in Gl (13) hat den Grad $2n - 1$, das Zählerpolynom g^2 höchstens den Grad $2n$.

Eine reelle ungerade Funktion mit einfachen, imaginären Polen, eine sogenannte „gegenseitige Reaktanz“ läßt sich aber stets und zwar eindeutig in die Differenz zweier Reaktanzen zerlegen, was man sofort einsieht, wenn man sie in Partialbrüche (mit notwendig reellen Residuen) zerlegt und die Summanden mit positiven und jene mit negativen Residuen zusammenfaßt. Gl (13) fordert nun gerade die Zerlegung von $f(\lambda)$ in die Differenz zweier Reaktanzen g_2/u_2 und u_1/g_1, so daß unsere Aufgabe, wenn überhaupt, dann eindeutig bis auf den erwähnten konstanten Faktor lösbar ist.

Andererseits fordert aber Gl (13), weil der Minuend g_2/u_2 mit dem Nenner u_2, der Subtrahend u_1/g_1 mit dem Nenner g_1 geschrieben ist, daß alle von den Nullstellen von u_2 herrührenden Partialbruchanteile dem Minuenden, alle von den Nullstellen von g_1 herrührenden dagegen dem Subtrahenden zugehören. Aber gerade das ist der Fall, so daß tatsächlich die

beiden Reaktanzen mit den Nennern u_2 und g_1 geschrieben werden können, womit dann auch die Zähler g_2 und u_1 eindeutig bestimmt sind. Es gilt nämlich die

Regel B:

„Man zerlege $f(\lambda) = \frac{g^2}{g_1 u_2}$ in Partialbrüche und fasse zu einem Summanden $z_{22}(\lambda)$ alle Partialbrüche zusammen, die von Nullstellen des Polynoms $u_2(\lambda)$ herrühren, dazu gegebenenfalls den Partialbruch (der Form $A \cdot \lambda$), der einem Pol bei $\lambda = \infty$ entspricht, zu einem Summanden $-1/y_{22}$ alle übrigen, von Nullstellen des Polynoms g_1 herrührenden Partialbrüche. Dann sind z_{22} und $1/y_{22}$ Reaktanzen, nämlich der rechte Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand des gesuchten Vierpols.“

Um dies zu beweisen, ist zu beachten, daß der Nenner $g_1 u_2$ von Gl (13) das Produkt von Zähler und Nenner einer gekürzt geschriebenen Reaktanz ist. Ein solches ist aber stets ein reelles ungerades Polynom mit einfachen Nullstellen auf der imaginären Achse, an denen die Ableitung positiv bzw. negativ ist, je nachdem ob es sich um eine Nullstelle des ungeraden oder geraden der beiden Polynome g_1 und u_2 handelt. Dies folgt einfach aus wohlbekannten Eigenschaften einer Reaktanz, nämlich daraus, daß die betrachteten Polynome reelle Polynome mit Koeffizienten einerlei Vorzeichens sind, davon eines gerade, das andere ungerade, und daraus, daß die Ableitung einer Reaktanz oder ihres reziproken Wertes auf der imaginären Achse überall positiv ist.

Jetzt ist noch zu berücksichtigen, daß für reelle ω $g^2(i\omega) > 0$ bzw. < 0, je nachdem ob g ein gerades oder ungerades Polynom ist. Setzt man für den Zähler g^2 und für den Nenner $g_1 u_2$ der Funktion $f(\lambda)$ nach Gl (13) für die Nullstellen von $g_1 u_2$ (bzw. für die Stelle $\lambda = \infty$, wenn der Grad von g^2 größer ist als der von $g_1 u_2$) Potenzreihenentwicklungen an und dividiert die Anfangsglieder, so ergibt sich, daß zu solchen Polen, die Nullstellen von u_2 sind und gegebenenfalls am Pol $\lambda = \infty$ Partialbrüche mit positiv Koeffizienten gehören, zu Polen dagegen, die Nullstellen von g_1 sind Partialbrüche mit negativem Koeffizienten $z_{22} = g_2/u_2$ und $1/y_{22} = u_1/g_1$ sind demnach reelle, rationale und wegen Gl (13) ungerade Funktionen (weil ihre Differenz ungerade ist) mit einfachen, imaginären Polen mit positivem Residuum. Solche Funktionen sind aber, wie bekannt, Reaktanzen. Damit ist für die nicht entarteten Fälle alles bewiesen.

Seien g_1 und u_2 die angenommenen Polynome, dann sind mit einer reellen Konstanten k auch $k \cdot g_1$ und $k \cdot u_2$ zulässige Polynome. Legt man diese zugrunde, so multipliziert sich $f(\lambda)$ mit $1/k^2$, mithin g_2 und u_1 mit $1/k$. Die neue Matrix lautet:

$$\text{statt} \quad \frac{1}{g} \cdot \begin{Vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{Vmatrix} \tag{14}$$

$$\text{nunmehr} \quad \frac{1}{g} \cdot \begin{Vmatrix} k g_1 & \frac{1}{k} u_1 \\ k u_2 & \frac{1}{k} g_2 \end{Vmatrix} \tag{15}$$

Die Unbestimmtheit des Faktors k bedeutet also, daß der gesuchte Vierpol eindeutig nur bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers mit beliebiger positiver oder negativer Übersetzung bestimmt ist, was notwendig herauskommen muß, weil dies weder den linken Leerlaufwiderstand noch die Sperrstellen verändert. Nachschalten eines idealen Übertragers heißt nämlich in der Sprache der Kettenmatrizen Rechtsmultiplikation der Matrix (14) mit der Kettenmatrix

$$\begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{Vmatrix} \tag{16}$$

eines idealen Übertragers, was die Matrix (14) in die Matrix (15) überführt.

Es bleibt noch zu untersuchen, wann der Fall $u_1 \equiv 0$ eintreten kann und ob auch dann Bedingung 3 des Realisierbarkeitssatzes erfüllt ist. Nach unserer Konstruktionsvorschrift — Regel B — und dem bereits Bewiesenen kann dies nur eintreten, wenn keine Nullstelle von g_1 zu einem Pol von $f(\lambda)$ führt, tritt andererseits immer dann ein, wenn dies der Fall ist, d. h. wenn g durch g_1 teilbar ist. Da g keinen höheren Grad haben kann als g_1, bedeutet dies

$g_1 \equiv k * g$ (k : reelle Konstante)

und wegen Gl (13)

$$f(\lambda) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{u_2} \quad \text{und} \quad g_2 = \frac{1}{k^2} g_1 = \frac{1}{k} g$$

d. h. genau die für diesen Fall zutreffende Bedingung 3 des Realisierbarkeitssatzes. Die Matrix lautet in diesem Fall

$$\frac{1}{g(\lambda)} \begin{Vmatrix} k g(\lambda) & 0 \\ u_2(\lambda) & \frac{1}{k} g(\lambda) \end{Vmatrix} \tag{17}$$

und bedeutet physikalisch eine Querreaktanz $Z(\lambda) = \frac{k\, g(\lambda)}{u_2(\lambda)}$ mit nachgeschaltetem idealen Übertrager der Spannungsübersetzung $k:1$. Die (einfachen) Sperrstellen fallen alle mit Nullstellen der gegebenen Reaktanz zusammen.

Liegt im Gegensatz zum Bisherigen der Fall des Kurzschlußwiderstandes vor, so gilt die ganze Untersuchung, wie leicht im einzelnen zu verfolgen, wenn man die Polynome g_1 und g_2, u_1 und u_2 miteinander vertauscht. An die Stellung der Gl (13) tritt die Gleichung:

$$\varphi(\lambda) = \frac{g^2(\lambda)}{g_2(\lambda)\, u_1(\lambda)} = \frac{g_1(\lambda)}{u_1(\lambda)} - \frac{u_2(\lambda)}{g_2(\lambda)}, \tag{18}$$

an Stelle der Regel B die

Regel C:

Man zerlege $\varphi(\lambda) = \frac{g^2(\lambda)}{g_2(\lambda)\, u_1(\lambda)}$ in Partialbrüche und fasse zu einem Summanden $y_{22}(\lambda)$ alle Partialbrüche zusammen, die von Nullstellen des Polynoms $u_1(\lambda)$ herrühren, dazu gegebenenfalls den Partialbruch (der Form $A \cdot \lambda$), der einem Pol bei $\lambda = \infty$ entspricht, zu einem Summanden $-1/z_{22}$ alle übrigen, von Nullstellen des Polynoms $g_2(\lambda)$ herrührenden Partialbrüche, dann sind y_{22} und $1/z_{22}$ Reaktanzen, nämlich der rechte Kurzschluß- und Leerlaufleitwert des gesuchten Vierpols.

Ebenso wie früher bedeutet der unbestimmte, gemeinsame Faktor k in den sonst gegebenen Polynomen g_2 und u_1, daß der gesuchte Vierpol nur bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers eindeutig bestimmt ist.

Der ausgeartete Fall $u_2 = 0$ tritt immer dann und nur dann ein, wenn alle (einfachen) Sperrstellen mit Polen der gegebenen Reaktanz zusammenfallen, und die gesuchte Matrix lautet dann:

$$\frac{1}{g(\lambda)} \begin{Vmatrix} k g(\lambda) & u_1(\lambda) \\ 0 & \frac{1}{k} g(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

was eine Längsreaktanz $Z(\lambda) = \frac{k\, u_1(\lambda)}{g(\lambda)}$ mit nachgeschaltetem Übertrager der Spannungsübersetzung $k:1$ bedeutet.

Alles zusammengenommen haben wir nun den Satz, der die Grundaufgabe erschöpfend löst.

Satz 1:

Die Grundaufgabe ist stets durch einen eindeutig bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers bestimmten Vierpol lösbar, und zwar entweder durch einen Leerlauf- oder aber durch einen Kurzschlußwiderstand. Welches von beiden eintritt, bestimmt Regel A. Ist der gegebene Widerstand, gekürzt geschrieben, $Z(\lambda) = \frac{g_1(\lambda)}{u_2(\lambda)}$ bzw. $\frac{u_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}$, worin jeweils beide Polynome bis auf einen reellen, konstanten Faktor eindeutig gegeben sind, und ist $g(\lambda)$ das normierte Polynom, dessen Nullstellen die endlichen Sperrstellen sind, so erhält man die noch fehlenden Polynome der in normierter Polynomform geschriebenen Kettenmatrix

$$\frac{1}{g} \begin{Vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{Vmatrix},$$

dadurch, daß man nach Regel B bzw. C die gegenseitige Reaktanz

$$f(\lambda) = \frac{g^2(\lambda)}{g_1(\lambda)\, u_2(\lambda)} \text{ bzw. } \varphi(\lambda) = \frac{g^2(\lambda)}{g_2(\lambda)\, u_1(\lambda)}$$

gemäß

$$f(\lambda) = z_{22}(\lambda) - 1/y_{22}(\lambda)$$

bzw.

$$\varphi(\lambda) = y_{22}(\lambda) - 1/z_{22}(\lambda)$$

als Differenz zweier Reaktanzen darstellt, was immer, und zwar eindeutig möglich ist. Schreibt man die so bestimmten Reaktanzen z_{22} und $1/y_{22}$ bzw. y_{22} und $1/z_{22}$ mit den Nennern u_2 und g_1 bzw. u_1 und g_2, so sind die zugehörigen Zähler die gesuchten Polynome g_2 und u_1 bzw. g_1 und u_2. Mit der obigen Kettenmatrix ist auch die Matrix

$$\frac{1}{g}\begin{Vmatrix} k\, g_1 & \frac{1}{k}\, u_1 \\ k\, u_2 & \frac{1}{k}\, g_2 \end{Vmatrix}$$

($k =$ beliebige Konstante $\neq 0$) eine Lösung. Änderung von k bedeutet Nachschalten eines idealen Übertragers. Andere Lösungen gibt es nicht."

In den bisherigen Betrachtungen war vorausgesetzt worden, daß weder die gegebene Reaktanz selbst noch ihr reziproker Wert identisch verschwinden. Es ist aber auch möglich, diese ausgearteten Fälle mit zu erfassen. Festgehalten werden soll aber nach wie vor der bisherige, dem Realisierbarkeitssatz zugrunde liegende Begriff des „übertragenden" Vierpols, der Allsperren ausschließt. Danach kann nur, entsprechend der dritten Bedingung des Realisierbarkeitssatzes, der Leerlaufwiderstand identisch ∞, der Kurzschlußwiderstand identisch 0 werden, wobei Sperrstellen nicht auftreten.

Versteht man demnach unter einer Reaktanz 0-ten Grades eine, die selbst oder deren reziproker Wert identisch verschwindet, so behält die Grundaufgabe auch für $n = 0$ einen Sinn. Regel A muß durch einen Zusatz ergänzt werden:

Regel A Zusatz:

Ist die gegebene Reaktanz identisch ∞ (identisch 0), so ergibt sich ein sperrstellenloser Vierpol mit ihr als Leerlauf- (Kurzschluß-)Widerstand.

In beiden Fällen ist die einzige Lösung ein idealer Übertrager mit der beliebigen Übersetzung k, dessen Kettenmatrix

$$\|\mathsf{K}\| = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{Vmatrix}$$

lautet. Betrachten wir nämlich etwa den Fall des Leerlaufwiderstandes, so ist nach dem Realisierbarkeitssatz Bedingung 3 $u_2 \equiv 0$, mithin $g_1 = k \cdot g$, $g_2 = \frac{1}{k} \cdot g$. Da der Vierpol keine Sperrstellen haben soll, ist $g \equiv 1$, mithin $g_1 = k$, $g_2 = 1/k \cdot u_1$ kann, weil g ein gerades Polynom ist, nach Bedingung 1 nur ein ungerades Polynom sein, darf aber andererseits keinen höheren Grad als g haben, weil sonst $\lambda = \infty$ eine Sperrstelle wäre. Also ist $u_1 \equiv 0$, und die obige Behauptung ist für den Leerlauffall bewiesen. Im Kurzschlußfall schließt man ganz analog unter Vertauschung von u_1 mit u_2 und g_1 mit g_2.

Regeln B und C werden in diesem ausgearteten Fall gegenstandslos, und Satz 1 erhält den Zusatz:

Satz 1 Zusatz:

Verschwindet die gegebene Reaktanz oder ihr Kehrwert identisch ($n = 0$), so ist die einzige Lösung die Matrix

$$\begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{Vmatrix} \qquad (k = \text{reelle Konstante}),$$

welche einen idealen Übertrager der Spannungsübersetzung $k:1$ bedeutet.

3. Grundaufgabe und Widerstands- oder Leitwerts-Matrix.

Ebensogut wie nach der Kettenmatrix kann man natürlich auch nach der Widerstandsmatrix oder nach der Leitwertsmatrix fragen. Eine solche Untersuchung braucht auch auf die Kettenmatrix keinen Bezug zu nehmen. Es ist jedoch einfacher, die bereits gewonnenen Ergebnisse zu benützen. Eine zunächst zu beantwortende Vorfrage lautet, wann diese Matrixen überhaupt existieren. Die Antwort ergibt sich zwanglos aus unseren bisherigen Ergebnissen, wenn man die aus den Gl (1), (3) und (5) leicht ableitbaren Formeln berücksichtigt, welche die Grössen der Widerstands-bzw. Leit-

wertsmatrix durch diejenigen der Kettenmatrix ausdrücken. Sie lauten bekanntlich

$$z_{11} = \frac{g_1}{u_2} \qquad z_{12} = z_{21} = \frac{g}{u_2} \qquad z_{22} = \frac{g_2}{u_2} \quad (20)$$

$$y_{11} = \frac{g_2}{u_1} \qquad -y_{12} = -y_{21} = \frac{g}{u_1} \qquad y_{22} = \frac{g_1}{u_1}. \quad (21)$$

Hiernach existiert die Widerstandsmatrix, solange nicht $u_2 = 0$, und die Leitwertsmatrix, solange nicht $u_1 = 0$; indem wir aus unseren Ergebnissen entnehmen, wann dies der Fall ist, erhalten wir die

Regel D:

Ist die gegebene Reaktanz vom Grad 0, so existiert weder eine Widerstands- noch eine Leitwertsmatrix. Ist die Reaktanz von einem Grad > 0 und ist die Grundaufgabe nach Regel A mit einem Leerlaufwiderstand (Kurzschlußwiderstand) lösbar, so existiert immer eine Widerstands- (Leitwerts-) Matrix, eine Leitwerts- (Widerstands-) Matrix dagegen nicht, wenn alle gegebenen Sperrstellen einfach sind und mit Nullstellen (Polen) der gegebenen Reaktanz zusammenfallen.

Die Ausnahmefälle haben die bekannte, einfache, physikalische Bedeutung: Querwiderstand bzw. Längswiderstand mit nachgeschaltetem Übertrager.

Regel D legt es nahe, die Widerstandsmatrix im Leerlauffall, die Leitwertsmatrix im Kurzschlußfall aufzustellen. Betrachten wir zunächst den Leerlauffall und untersuchen wir die dann nach Regel D sicher existierende Widerstandsmatrix, wobei wir den trivialen Fall, gegebene Reaktanz $= \infty$, außer acht lassen. Ihre Elemente z_{11}, $z_{12} = z_{21}$ und z_{22} genügen folgendem Realisierbarkeitssatz (Cauer'sches Reaktanztheorem):

„Drei ungerade, rationale, reelle Funktionen $z_{11}(\lambda)$, $z_{12}(\lambda) = z_{21}(\lambda)$ und $z_{22}(\lambda)$ sind dann und nur dann Elemente der Widerstandsmatrix eines Reaktanzvierpols, wenn gilt

1. Alle drei Funktionen haben nur einfache Pole auf der imaginären Achse.
2. z_{11} und z_{22} sind Reaktanzen.
3. Jeder Pol von z_{12} ist auch Pol von z_{11} und z_{22}, und es gilt, wenn A_ν, B_ν, D_ν die Partialbruch-Koeffizienten zum Pol ν sind: $A_\nu \cdot D_\nu \geq B_\nu^2$."

Da die Existenz unserer Lösung schon feststeht, braucht nicht mehr bewiesen zu werden, daß diese Bedingungen erfüllt sind, obwohl ein solcher Beweis recht einfach ist. Dagegen muß untersucht werden, worin sich unsere Einschränkung, wonach Grad der gegebenen Reaktanz = Grad der Kettenmatrix sein soll, hier bemerkbar macht. In den Polynomen der Kettenmatrix kam dies dadurch zum Ausdruck, daß g_1 und u_2 teilerfremd sein und eines der beiden Polynome den Grad n der Matrix haben sollte. Was dies hier bedeutet, kann aus den Gl (20) und der Determinantenregel $g_1 g_2 - u_1 u_2 = g^2$ abgelesen werden.

Alle Pole einer der drei Größen z_{11}, z_{12}, z_{22} sind demnach Nullstellen von u_2. Ein Pol ist ferner noch der Punkt ∞, wenn g_1 oder g_2 einen höheren Grad als u_2 hat. Alle Pole von z_{22} sind ferner auch Pole von z_{12}. Ein endlicher Pol von z_{22} ist nämlich Nullstelle von u_2, aber nicht von g_2 (weil sonst z_{22} dort keinen Pol hätte) und nicht von g_1 (wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit von u_2 und g_1). Die Determinantenregel zeigt dann, weil an dieser Stelle $g_1 g_2 \neq 0$, $u_1 u_2 = 0$ ist, daß g dort keine Nullstelle haben kann, was bedeutet, daß $z_{12} = g/u_2$ einen Pol hat. Hat z_{22} den Pol $\lambda = \infty$, so ist der Grad von g_2 um 1 höher als der von u_2; u_2 hat also nicht den Grad n; dann muß ihn wegen unserer speziellen Voraussetzung aber g_1 haben. Die Determinantenregel zeigt dann, weil $g_1 g_2$ den Grad $2n$, $u_1 u_2$ einen kleineren hat, daß g den Grad n, mithin z_{12} bei $\lambda = \infty$ einen Pol hat. Damit ist aber bewiesen, daß tatsächlich alle Pole von z_{22} auch solche von z_{12} und von z_{11} sind.

Mehr noch: Die zugehörigen Partialbruchkoeffizienten A_ν, B_ν und D_ν gehorchen der Bedingung

$$A_\nu \cdot D_\nu = B_\nu^2. \qquad (22)$$

Dies folgt aus der Konstruktionsvorschrift des Satzes 1, nach der z_{22} die positiven Partialbrüche der Funktion $f = \frac{g^2}{g_1 u_2}$ zusammen-

faßt. Das sind aber die zu den Nullstellen von u_2, die nicht gleichzeitig Nullstellen von g sind, gehörigen und der zu $\lambda = \infty$ gehörige, falls g den Grad n hat. Für einen zu einem endlichen Pol gehörigen Partialbruchsatz gilt aber wegen Gl (20)

$$A_\nu : B_\nu : D_\nu = g_1 (i\alpha_\nu) : g (i\alpha_\nu) : \frac{g^2 (i\alpha_\nu)}{g_1 (i\alpha_\nu)}$$

woraus Gl (22) folgt.

Ähnlich gilt für $\lambda = \infty$, wenn Pol von z_{22},

$$A_\infty : B_\infty = B_\infty : D_\infty = \gamma_1 : \gamma$$

wo γ_1 und γ die Höchstkoeffizienten der Polynome g_1 und g sind, woraus wiederum Gl (22) folgt.

Außer den Polen von z_{22} kann es nur noch Pole von z_{11} geben, die weder Pole von z_{12} noch von z_{22} sind. Dies tritt ein an Nullstellen von u_2, die gleichzeitig Nullstellen von g sind und gegebenenfalls für $\lambda = \infty$, wenn n = Grad von $g_1 >$ Grad von g ist.

Im Kurzschlußfall haben wir die Leitwertsmatrix zu betrachten und brauchen nur z_{11} mit y_{11}, z_{22} mit y_{22}, z_{12} mit $-y_{12}$, g_1 mit g_2, u_1 mit u_2 zu vertauschen. Im übrigen gilt alles unverändert.

Alles zusammen haben wir demnach gefunden

Regel E:

Die Widerstandsmatrix (Leitwertsmatrix) des die Grundaufgabe im Leerlauffall (Kurzschlußfall) lösenden Vierpols hat die Eigenschaft, daß in der Partialbruchzerlegung ihrer Elemente z_{11}, z_{12} und z_{22} (y_{11}, y_{12} und y_{22}) nur Partialbrüche von z_{11} (y_{11}) allein oder allen dreien gemeinsame Partialbrüche mit der Koeffizientenbedingung $A_\nu \cdot D_\nu = B_\nu^2$ auftreten.

Die in einem allgemeinen Reaktanzvierpol noch möglichen Partialbrüche von z_{22} (y_{22}) allein, oder allen dreien gemeinsamen Partialbrüche mit $A_\nu \cdot D_\nu > B_\nu^2$ können in unserer Lösung also nicht auftreten.

Dies Ergebnis liefert auch gleich eine Konstruktionsvorschrift für die gesuchte Matrix. Betrachten wir wieder den Leerlauffall, so ist z_{11} unmittelbar gegeben. Damit sind auch die Polynome g_1 und u_2 bis auf einen reellen konstanten Faktor gegeben und damit auch $z_{12} = g/u_2$ bis auf einen solchen. z_{12} hat die Pole von z_{11}, die nicht Sperrstellen sind, zu ebenfalls einfachen Polen, die r-fachen Sperrstellen, die nicht mit Polen von z_{11} zusammenfallen, zu r-fachen Nullstellen, diejenigen, die dies tun, zu $(r-1)$-fachen Nullstellen. Hierdurch ist z_{12} in der Tat bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Zerlegt man nun z_{11} und z_{12} in Partialbrüche, so ergibt sich z_{22} aus Regel E.

Unter Berücksichtigung der entsprechenden, für den Kurzschlußfall geltenden Regel, erhalten wir endlich, die wesentlichsten Ergebnisse dieses Abschnittes zusammenfassend, den

Satz 2:

„Die Grundaufgabe ist stets, und zwar durch einen eindeutig bis auf Nachschalten eines idealen Übertragers bestimmten Vierpol lösbar, und zwar entweder durch einen Leerlauf- oder aber durch einen Kurzschlußwiderstand. Welches von beiden eintritt, bestimmt Regel A. Ist die gegebene Reaktanz vom Grad >0, so besitzt der lösende Vierpol immer entweder eine Widerstands- oder (auch) eine Leitwertsmatrix, und zwar im Fall des Leerlaufwiderstandes immer eine Widerstands-, im Fall des Kurzschlußwiderstandes immer eine Leitwertsmatrix[7].

Im ersteren (letzteren) Falle bestimmt man die fehlenden Größen der Widerstands- (Leitwerts-) Matrix auf folgende Weise:

Der gegenseitige Leerlaufwiderstand z_{12} (gegenseitige Kurzschlußleitwert y_{12}) ist bis auf einen reellen, konstanten Faktor k dadurch bestimmt, daß er diejenigen Pole von z_{11} (y_{11}), die nicht gleichzeitig Sperrstellen sind, zu einfachen Polen, r-fache Sperrstellen, die nicht mit Polen von z_{11} (y_{11}) zusammenfallen, zu r-fachen Nullstellen, solche, die

[7] Wann es im Fall des Leerlauf-(Kurzschluß-) Widerstandes eine Leitwerts-(Widerstands-) Matrix gibt, ist aus Regel D zu entnehmen.

mit Polen von z_{11} (y_{11}) zusammenfallen, zu $(r-1)$-fachen Nullstellen erhält.

Zerlegt man sowohl z_{11} (y_{11}), wie eine nach dieser Vorschrift gewählte Funktion z_{12} (y_{12}) in Partialbrüche mit den Koeffizienten A_ν bzw. B_ν (gleicher Index = gleicher Pol), so ergibt sich die noch fehlende Funktion z_{22} (y_{22}) in Partialbruchdarstellung mit den Koeffizienten $D_\nu = B^2{}_\nu / A_\nu$. Mit der so bestimmten Widerstands-(Leitwerts-)Matrix

$$\begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{Vmatrix} \left(\begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix} \right)$$

ist auch die Widerstands-(Leitwerts-)Matrix

$$\begin{Vmatrix} z_{11} & kz_{12} \\ kz_{21} & k^2 z_{22} \end{Vmatrix} \left(\begin{Vmatrix} y_{11} & ky_{12} \\ ky_{21} & k^2 y_{22} \end{Vmatrix} \right)$$

eine Lösung (k = reelle Konstante). Änderung von k bedeutet Nachschalten eines idealen Übertragers. Andere Lösungen gibt es nicht."

4. Physikalische Bedeutung der Lösung.

Die die Grundaufgabe lösenden Vierpole haben eine charakteristische Eigenschaft. Wird sie durch einen Leerlaufwiderstand (Kurzschlußwiderstand) gelöst, so haben in der Sprache der Kettenmatrix die beiden Polynome g_1 und u_2 (g_2 und u_1) keinen Teiler gemein, und eines der beiden Polynome hat den Grad der Matrix. In der Sprache der Widerstands-(Leitwerts-) Matrix drückt sich dasselbe in der Regel E aus. Was hat dies nun physikalisch zu bedeuten?

Vierpole, die diese Eigenschaft haben, habe ich früher rechte Reihenweichenfilter (bzw. Parallelweichenfilter) genannt (vgl. Arbeit [2], Satz 1). Mit dem Namen sollte zum Ausdruck gebracht werden, daß Vierpole, die durch rechts einseitiges Reihen- (bzw. Parallel-)schalten eine brauchbare Frequenzweiche geben sollen, diese Eigenschaft haben müssen. Ohne Bezugnahme auf jede praktische Anwendung sind sie (vgl. [2]) definiert als Reaktanzvierpole, deren rechter sogenannter „Betriebswiderstand" (d. h. der an den rechten Klemmen gemessene Widerstand, wenn die linken mit einem ohm'schen Widerstand belastet werden) bei reellen Frequenzen keine Pole (bzw. keine Nullstellen) besitzt. Ich neige im Sinne meiner Bemerkungen zur Terminologie aus Arbeit [2] heute mehr dazu, sie rechts widerstandsreguläre (bzw. leitwertsreguläre) Reaktanzvierpole zu nennen.

Man kann demgemäß an Stelle der Sätze 1 und 2 auch den folgenden aussprechen

Satz 3:

„Die Grundaufgabe ist stets lösbar, und zwar entweder durch den linken Leerlaufwiderstand eines rechts widerstandsregulären, oder durch den linken Kurzschlußwiderstand eines rechts leitwertsregulären, bis auf Rechtsnachschalten eines idealen Übertragers eindeutig bestimmten Reaktanzvierpols. Welches von beiden eintritt, bestimmt Regel A.

Die fehlenden Bestimmungsstücke der Kettenmatrix erhält man aus der in Satz 1 ausgesprochenen Regel, diejenigen der Widerstands- bzw. Leitwertsmatrix des rechts widerstands-bzw. leitwertsregulären Vierpols nach der Regel von Satz 2."

Rechts widerstands- bzw. leitwertsreguläre Vierpole kann man noch auf eine andere Art anschaulich charakterisieren, nämlich als Vierpole, deren rechter Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand keine gemeinsamen Pole (bzw. Nullstellen) besitzt. Daß dies dasselbe ist, sieht man sofort aus der Kettenmatrix. Da $z_{22} = g_2/u_2$ und $1/y_{22} = u_1/g_1$ ist, folgt, daß wenn g_1 und u_2 teilerfremd sind und eins dieser Polynome den Grad der Matrix hat, z_{22} und $1/y_{22}$ keine gemeinsamen Pole haben und umgekehrt. Analoges gilt bei der Betrachtung der Nullstellen von z_{22} und $1/y_{22}$ und der Polynome g_2 und u_1. Diese Deutung ist besonders anschaulich. Hat nämlich ein Vierpol an seinem rechten Ende einen Längszweipol, so sind dessen Pole gemeinsame Pole des rechten

Leerlauf- und Kurzschlußwiderstandes. Daraus und aus dem dualen Gegenstück erkennt man:

„Zu einem rechts widerstands-(leitwerts-) regulären Reaktanzvierpol gibt es keinen äquivalenten, der rechts einen Längs-(Quer-)Zweipol enthält."

Ein Satz, der natürlich auch aus der Definition mit dem Betriebswiderstand sofort gefolgert werden kann.

Schrifttum.

[1] H. Piloty, „Über die Realisierbarkeitssätze der Kettenmatrix von Reaktanzvierpolen." TFT **30,** Heft 8, [1941].

[2] H. Piloty, „Konjugierte Impedanzen und Weichenfilter." TFT **31,** Heft 10, [1942].